ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------✍📖✍--------------

ĐỖ THỊ PHƯƠNG

VỀ BÀI TOÁN ĐẢM BẢO CHI PHÍ ĐIỀU KHIỂN CHO MỘT LỚP HỆ NƠ RON THẦN KINH PHÂN THỨ CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Mai Viết Thuận
TS. Nguyễn Hữu Sáu

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên được nghiên cứu đầu tiên bởi L.O. Chua và L. Yang vào năm 1988 [6, 7]. Mô hình này đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong những năm gần đây do những ứng dụng rộng lớn của nó trong xử lí tín hiệu, xử lí hình ảnh, tối ưu hóa và các lĩnh vực khác [7, 18]. Năm 2008, trong một nghiên cứu của mình, A. Boroomand và M.B. Menhaj [3] lần đầu tiên mô hình hóa mạng nơ ron bởi hệ phương trình vi phân phân thứ (Caputo hoặc Riemann–Liouville). So với mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên, mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ (Caputo hoặc Riemann–Liouville) có thể mô tả các đặc tính và tính chất của mạng nơ ron một cách chính xác hơn [3, 18]. Do đó hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Nhiều kết quả hay và thú vị về hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ đã được công bố trong những năm gần đây.

Từ quan điểm của kỹ thuật, người ta mong muốn thiết kế các hệ thống điều khiển không chỉ ổn định tiệm cận mà còn có thể đảm bảo mức hiệu suất hệ thống phù hợp. Năm 1972, hai nhà khoa học Chang và Peng [5] đưa ra và nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ động lực được mô tả bởi hệ phương trình vi phân thường. Sau đó bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ với bậc nguyên đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Đối với hệ nơ ron thần kinh với bậc nguyên, đã có một số kết quả thú vị và sâu sắc được công bố trong những năm gần đây (xem [10, 11, 12] và các tài liệu tham khảo trong đó). Năm 2019, Thuận và Hướng [20] nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một lớp hệ nơ ron thần kinh phân thứ có trễ.

Luận văn tập trung trình bày một số tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một lớp hệ nơ ron thần kinh phân thứ có trễ dựa trên cơ sở đọc hiểu và tổng hợp bài báo đã được công bố trong những năm gần đây (xem [20]). Luận văn gồm có 2 chương gồm những nội dung chính như sau:

Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một định lý Razumikhin cho hệ phân thứ có trễ. Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số kết quả về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân với bậc nguyên. Cuối chương, chúng tôi trình bày một số bổ đề bổ trợ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [8, 14, 15, 17, 21].

Trong chương 2 của luận văn, chúng tôi trình bày một số tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một lớp hệ nơ ron thần kinh phân thứ có trễ. Ngoài ra, chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho kết quả lý thuyết.

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Mai Viết Thuận. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình. Người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn, tận tình dìu dắt và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn BGH trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và nghiên cứu.

Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình thân yêu,cảm ơn những người bạn thân thiết đã chăm sóc động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu. Sau cùng tôi xin kính chúc toàn thể quý thầy cô trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên thật dồi dào sức khỏe, niềm tin để tiếp tục thực hiện sứ mệnh cao đẹp của mình là truyền đạt tri thức cho thế hệ mai sau.

Xin chân thành cảm ơn.

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian vec tơ thực Euclide n chiều
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$= \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\|A\|$	chuẩn phổ của ma trận A, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$
$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A \geq B$	nghĩa là $A - B \geq 0$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$LMIs$	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Linear matrix inequalities)
$\|x\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên$[a,b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^m[a,b]$	không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp m trên$[a,b]$
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha, D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\Gamma(x)$	hàm Gamma
$E_{\alpha,\beta}$	hàm Mittag-Leffler hai tham số
$\lceil\alpha\rceil$	số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α
$L = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, l_3\}$	$L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}$

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ, định lý Razumikhin cho hệ phương trình vi phân phân thứ, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân với bậc nguyên. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận văn cho các chương sau. Kiến thức sử dụng ở chương này được tham khảo ở [8, 14, 15, 17, 21].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. ([15]) Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$
{}_{t_0}I_t^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in (a, b],
$$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \alpha > 0$.

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$, chúng ta quy ước ${}_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lý sau

Định lý 1.1. ([15]) *Giả sử* $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *là một hàm khả tích trên* $[a, b]$. *Khi đó, tích phân* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ *tồn tại với hầu hết* $t \in [a, b]$. *Hơn nữa,* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ *cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. ([15])
(i) Cho $x(t) = (t - a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}(t - a)^{\alpha+\beta}, \quad t > a. $$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha + j + 1)}, \quad t > 0. $$

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Mục này trình bày một cách ngắn gọn về đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo. Đây là hai loại đạo hàm được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

Định nghĩa 1.2. ([15]) Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha}x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t - s)^{n-\alpha-1}x(s)ds, $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function)

$$ f(t) = \begin{cases} 1, \text{nếu} \quad t \geq 0 \\ 0, \text{nếu} \quad t < 0. \end{cases} $$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. $$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau.

Cho $[a,b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a,b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a,b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a,b)),$$

do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a,b]$ như sau:

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a,b]$.

Mệnh đề 1.1. ([15]) *Không gian $AC^n[a,b]$ chứa tất cả các hàm $f(t)$ có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t-t_0)^k,$$

trong đó $\varphi(t) \in L(a,b), c_k(k = 0,1,\dots,n-1)$ là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^t (t-s)^{n-1}\varphi(s)ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(k = 0,1,\dots,n-1).$$

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

Định lý 1.2. ([15]) *Cho $\alpha \geq 0, n = \lceil\alpha\rceil$. Nếu $f(t) \in AC^n[a,b]$, khi đó đạo hàm phân thứ ${}^{RL}_{t_0}D_t^{\alpha}f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a,b]$ và có thể được biểu diễn dưới dạng sau*

$${}^{RL}_{t_0}D_t^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 1.2

Hệ quả 1.1. ([15]) *Nếu* $0 < \alpha < 1$ *và* $f(t) \in AC[a, b]$ *thì*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(t_0)}{(t-t_0)^{\alpha}} + \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{\alpha}} \right]. $$

Mệnh đề sau khẳng định toán tử đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville là một toán tử tuyến tính.

Mệnh đề 1.2. ([14]) *Cho trước một số thực dương* α. *Khi đó đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp* α *là một toán tử tuyến tính, tức là*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} \left[\lambda f(t) + \mu g(t) \right] = \lambda\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} g(t) $$

trong đó $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$.

Chứng minh. Ta có

$$ \begin{aligned} & {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} \left[\lambda f(t) + \mu g(t) \right] \\ & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} \left[\lambda f(s) + \mu g(s) \right] ds \\ & = \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} g(s) ds \\ & = \lambda\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} g(t). \end{aligned} $$

□

Định nghĩa 1.3. ([14]) Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Caputo cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) := {}_{t_0}I_t^{n-\alpha} D^n x(t), $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Đối với một hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t))^T$ đạo hàm phân thứ Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) := \left({}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_1(t), {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_2(t), \ldots, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_d(t) \right)^T. $$

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại đào hàm Caputo phân thứ cấp α.